ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação
Professor Dr. Paulo Marcelo Tasinaffo
CE – 201 – Lógica para Ciência da Computação

ListEx 3

2º. Semestre de 2006
Marcelo Nogueira
São José dos Campos - SP

ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação
Professor Dr. Paulo Marcelo Tasinaffo
CE – 201 – Lógica para Ciência da Computação

(Exercício 01) Demonstre as seguintes propriedades do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem:

a) $\forall x(Px \land Qx) / \forall xPx \land \forall xQx$

b) $\forall xPx / \forall yPy$

c) $\exists xPx / \exists yPy$

d) $\exists xPx / \exists xy(Px \land Py)$

e) $\forall xPx / \neg\exists x\neg Px$ De Morgan Generalizadas

f) $\exists xPx / \neg\forall x\neg Px$ De Morgan Generalizadas

g) $\neg\forall xPx / \exists x\neg Px$

h) $\neg\exists xPx / \forall x\neg Px$

i) $\forall x(\theta \to Px) / \theta \to \forall xPx$

j) $\forall x(\theta \land Px) / \theta \land \forall xPx$

k) $\forall x(Px \to \theta) / \exists xPx \to \theta$

l) $\exists x(Px \to \theta) / \forall xPx \to \theta$

m) $\forall x(Px \to Qx)\ ' \ \forall xPx \to \forall xQx$

n) $\forall x(Px \to Qx)\ ' \ \exists xPx \to \exists xQx$

o) $\forall x(Px \land Qx) / \forall xPx \land \forall xQx$

p) $\exists x(Px \land Qx) / \exists xPx \land \exists xQx$

q) $\forall xPx \lor \forall xQx\ ' \ \forall x(Px \lor Qx)$

r) $\forall xyuv(v=u \land y=v \to (Rxy \leftrightarrow Ruv))$ Lei lógica

Resolução:

b) $\forall xPx / \forall yPy$

1.	$\forall xPx$	Premissa
2.	Py	(1) (IU)
3.	$\forall yPy$	(2) (GU(y))
4.	$\forall xPx \to \forall yPy$	(TD)

Implicação no sentido contrário.

1.	$\forall yPy$	Premissa
2.	Px	(1) (IU)
3.	$\forall xPx$	(2) (GU(x))
4.	$\forall yPy \to \forall xPx$	(TD)

2º. Semestre de 2006
Marcelo Nogueira
São José dos Campos - SP

ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica e Computação
Professor Dr. Paulo Marcelo Tasinaffo
CE – 201 – Lógica para Ciência da Computação

e) $\forall xPx \,/\, \neg\exists x\neg Px$

1.	$\forall xPx$	Premissa
2.	$\exists x\neg Px$	Premissa Ad.
3.	$\neg Py$	(2) (IE)
4.	$\exists x\neg Px \rightarrow \neg Py$	(2,3) (PC)
5.	$\neg\neg Py \rightarrow \exists x\neg Px$	(4) (Transp.)
6.	$Py \rightarrow \neg\exists x\neg Px$	(5) (DN)
7.	Py	(1) (IU)
8.	$\neg\exists x\neg Px$	(7,6) (MP)
9.	$\forall xPx \rightarrow \neg\exists x\neg Px$	(1,8) (PC)

Implicação no sentido contrário.

1.	$\neg\exists x\neg Px$	Premissa
2.	$\neg Py$	Premissa Ad.
3.	$\exists x\neg Px$	(2) (GE)
4.	$\exists x\neg Px \vee Py$	(3) (Ad.)
5.	Py	(4,1) (SD)
6.	$\neg Py \rightarrow Px$	(2,5) (PC)
7.	$Py \vee Py$	(6) (Impl. e DN)
8.	Py	(7) (Equiv.)
9.	$\forall xPx$	(8) (GU)
10.	$\neg\exists x\neg Px \rightarrow \forall xPx$	(1,8) (PC)

f) $\exists xPx \,/\, \neg\forall x\neg Px$

1.	$\exists xPx$	Premissa
2.	Px	(1) (IE)
3.	$\forall y(\forall x\neg Px \rightarrow \neg Py)$	Axioma
4.	$\forall x\neg Px \rightarrow \neg Px$	(3) (IU)
5.	$\neg\neg Px \rightarrow \neg\forall x\neg Px$	(4) (Contrap.)
6.	$Px \rightarrow \neg\forall x\neg Px$	(5) (DN)
7.	$\neg\forall x\neg Px$	(2,6) (MP)

Implicação no sentido contrário.

1.	$\neg\forall x\neg Px$	Premissa
2.	$\forall y(Py \rightarrow \exists xPx)$	Axioma
3.	$Px \rightarrow \exists xPx$	(2) (IU)
4.	$\neg\exists xPx \rightarrow \neg Px$	(3) (Contrap.)
5.	$\neg\exists xPx$	P.P
6.	$\neg Px$	(5,4) (MP)
7.	$\forall x\neg Px$	(6) (GU(x))
8.	$\neg\exists xPx \rightarrow \forall x\neg Px$	(5 a 7) (TD)
9.	$\forall x\neg Px \rightarrow \neg\neg\exists xPx$	(8) (Contrap.)
10.	$\neg\neg\exists xPx$	(1,9) (MP)
11.	$\exists xPx$	(10) (DN)

2º. Semestre de 2006
Marcelo Nogueira
São José dos Campos - SP

g) ¬∀xPx ⁄ ∃x¬Px

1.	¬∀xPx	Premissa
2.	¬∃x¬Px	(1) (Ctr.)
3.	¬P(c)	(2) (Ctr.)
4.	∃x¬P(x)	(3) (IE)
5.	∃x¬P(x) ∧∃x¬P(x)	(2,4) (C)
6.	¬¬P(c)	(3,5) (RAA)
7.	P(c)	(6) (DN)
8.	∀xP(x)	(7) (IU)
9.	∀xP(x) ∧ ¬∀xP(x)	(1,8) (C)
10.	¬¬∃x¬P(x)	(2,9) (RAA)
11.	∃x¬Px	(10) (DN)

h) ¬∃xPx ⁄ ∀x¬Px

1.	¬∃xPx	Premissa
2.	Px	Premissa
3.	∃xPx	(2) (GE)
4.	¬∃xPx ∨ ¬Px	(1) (Ad.)
5.	¬Px	(3,2) (SD)
6.	Px →¬Px	(2-4) (TD)
7.	¬Px	(5) (Eq.)
8.	∀x¬Px	(6) (GU(x))
9.	¬∃xPx→ ∀x¬Px	(1-9) (TD)

i) ∀x(θ → Px) ⁄ θ → ∀xPx

1.	∃x(Px → θ)	Premissa
2.	∀xPx	Premissa
3.	Py → θ	(1) (IE(y))
4.	Py	(2) (IU)
5.	θ	(4,3) (MP)
6.	∀xPx → θ	(2 a 5) (PC)

j) ∀x(θ ∧ Px) ⁄ θ ∧ ∀xPx

1.	∀x(θ ∧ Px)	
2.	θ ∧ Py	(1) (IU)
3.	Py	(2) (Simpl.)
4.	∀xPx	(3) (GU)
5.	θ	(2) (Simpl.)
6.	∀x θ ∧ Px	(4,5) (Conj.)

1.	∀xθ ∧ Px	
2.	∀xPx	(1) (Simpl.)
3.	Py	(2) (IU)
4.	θ	(1) (Simpl.)
5.	θ ∧ Py	(3,4) (Conj.)
6.	∀x (θ ∧ Px)	(5) (GU)

o) ∀x(Px ∧ Qx)⁄ ∀xPx ∧ ∀xQx

1.	∀x(Px ∧ Qx)	
2.	Px ∧ Qx	(1) (Axioma, MP)
3.	Px	(2) (Tautol. A ∧ B→A, MP)
4.	Qx	(2) (Tautol. A ∧ B→B, MP)
5.	∀xPx	(3) (Generalização)
6.	∀xQx	(4) (Generalização)
7.	∀xPx ∧ ∀xQx	(5,6) (A ∧ B pode-se deduzir de A e B)

p) ∃x(Px ∧ Qx)⁄ ∃xPx ∧ ∃xQx

1.	∃xPx ∧ ∃xQx	Premissa
2.	∃xPx	(1) (Simpl.)
3.	∃xQx	(1) (Simpl.)
4.	Py	(2) (IE(y))
5.	Qy	(3) (IE(y))
6.	Py ∧ Qy	(4,6) (Conj.)
7.	∃x(Px ∧ Qx)	(6) (GE)