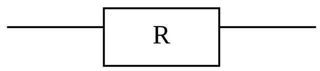
Módulo II – Resistores, Capacitores e Circuitos

Resistência Elétrica (R) e Resistores:

Resistor é o condutor que transforma energia elétrica em calor. Como o resistor é um condutor de elétrons, existem aqueles que facilitam ou dificultam a passagem da corrente elétrica. A medida do grau de dificuldade à passagem dos elétrons denomina-se **resistência elétrica** (**R**).

Em circuitos elétricos, representa-se um resistor de resistência **R** da seguinte forma:

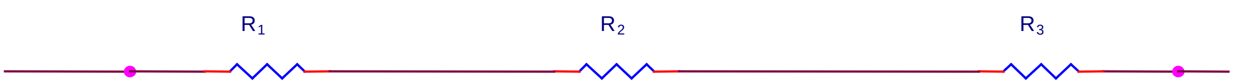


Ou

R

<u>Associação de Resistores</u>:

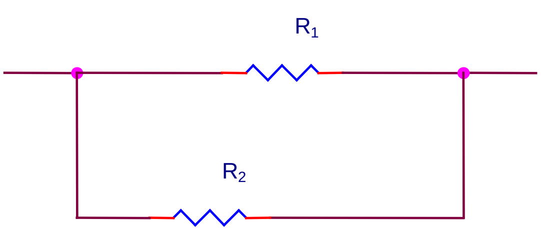
Associação em Série: Diz-se que vários resistores estão associados em série, quando estão ligados um em seguida ao outro. A resistência equivalente será:



$$R_e = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_N$$
$$i = i_1 = i_2 = i_3 = \ldots = i_N$$
$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_N$$

onde N = número de resistores em série.

Associação em Paralelo: Diz-se que vários resistores estão associados em paralelo, quando estão ligados aos mesmos pontos. A resistência equivalente será:



$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_N}$$
$$i = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots + i_N$$
$$V = V_1 = V_2 = V_3 = \ldots = V_N$$

onde N = número de resistores em paralelo.

Associação Mista de Resistores:

Quando estamos tratando de circuitos que possuam associação mista de resistores, o procedimento usado para simplificar e encontrarmos a resistência equivalente será:

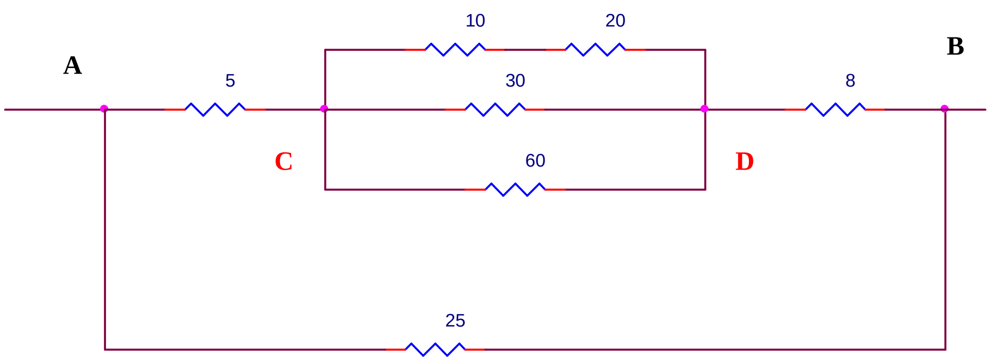
1. Colocam-se letras em todos os nós da associação (Lembrete: nó é o ponto de encontro de três ou mais resistores)

2. Substitui-se por um resistor equivalente os resistores que estiverem associados em série ou paralelo, desde que estejam entre dois nós. Redesenha-se o esquema, já com o resistor equivalente.

3. Repete-se a operação anterior, tantas vezes quantas forem necessárias. O resistor equivalente é aquele que fica entre os terminais da associação.

Exemplo:

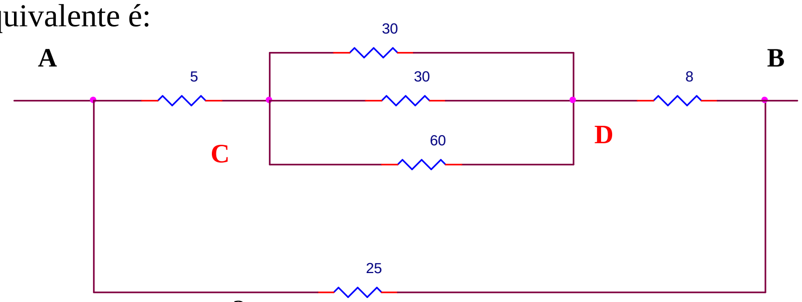
Determine a resistência equivalente, entre os terminais **A** e **B**, da associação representada na figura abaixo.



Solução: Colocam-se as letras C e D nos nós da associação. Entre eles, os resistores de 10 Ω e 20 Ω estão associados em série. A resistência equivalente entre eles é

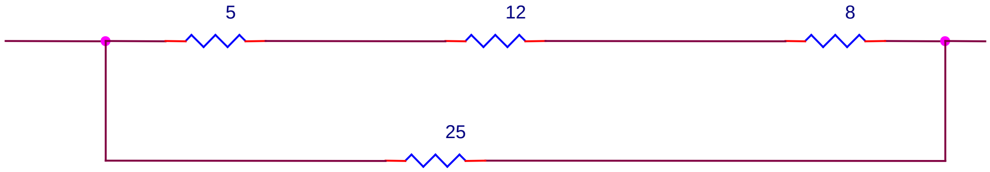
$$R_1 = 10 + 20 \Rightarrow R_1 = 30\Omega$$

Redesenhando, tem-se agora, entre os nós consecutivos C e D, três resistores associados em paralelo, cuja resistência equivalente é:



$$\frac{1}{R_2}=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\Rightarrow\frac{1}{R_2}=\frac{5}{60}\Rightarrow R_2=12\Omega$$

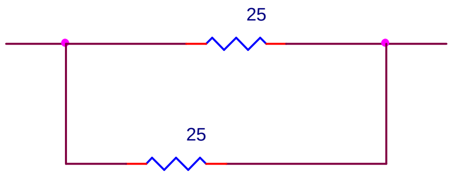
Redesenhando, tem-se agora, entre os terminais A e B, três resistores associados em série, cuja resistência equivalente é:

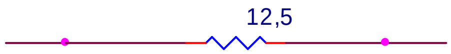


$$R_3=5+12+8\Rightarrow R_3=25\Omega$$

Redesenhando, tem-se ainda entre os terminais A e B, dois resistores associados em paralelo, cuja resistência equivalente é:

$$\frac{1}{R_e}=\frac{1}{25}+\frac{1}{25}\Rightarrow\frac{1}{R_e}=25\Rightarrow R_e=12{,}5\Omega$$





Primeira Lei de Ohm:

Aplicando-se uma diferença de potencial ***V*** nos terminais de um resistor, verifica-se que ele é percorrido por uma corrente elétrica ***i***. Ohm demonstrou experimentalmente que, mantida constante a temperatura do resistor, a corrente ***i*** é diretamente proporcional à ***V*** aplicada, ou seja:

$$V=R.I$$

Essa expressão é conhecida como **1ª Lei de Ohm**, onde **R** é a constante de proporcionalidade, característica do resistor, e denominada **resistência elétrica**.

A **condutância** (de unidade SI – siemens- **S**) é o inverso da resistência de um condutor.

A resistência de um fio condutor é proporcional ao comprimento do condutor, *L*, e inversamente proporcional à área de seção reta *A*:

$$R=\rho.\frac{L}{A}$$

A constante de proporcionalidade ρ é a **resistividade** do material condutor. A unidade SI da resistividade é ohm-metro (Ω.m):

Potência Elétrica (P):

Conforme já havíamos visto na aula passada,

$$P = V.I$$

Usando a lei de Ohm, podemos escrever também:

$$P = R.I^2$$

A potência de um resistor aumenta se a corrente aumenta.

$$P = \frac{V^2}{R}$$

A potência de um resistor, sob ddp constante, aumenta se diminui a sua resistência.

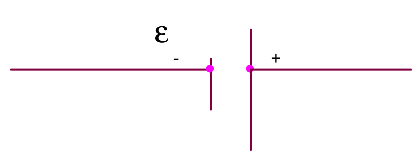
Como:

$$P = \frac{\tau_{AB}}{\Delta t} \Rightarrow \tau_{AB} = R * I^2 * \Delta t \qquad \text{(lei de Joule)}$$

FEM e Baterias:

A fim de se manter uma corrente estável e constante num condutor, é preciso dispor de uma fonte constante de energia elétrica. Um dispositivo que proporciona energia elétrica é uma **fonte de fem** (força eletromotriz). Exemplos destas fontes são as baterias. Uma fonte de fem efetua trabalho sobre uma carga que a atravessa, aumentando a sua energia potencial. O trabalho por unidade de carga é a **fem**, ε, da fonte. A unidade de fem é o volt, idêntica a unidade de diferença de potencial. A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria ideal é igual ao valor da fem desta bateria.

Em circuitos elétricos, representa-se uma fonte de **fem** da seguinte forma:

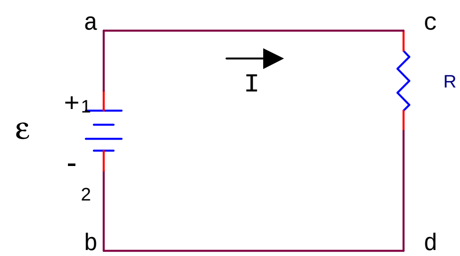


O sentido da corrente que irá percorrer o circuito é horário (do negativo para o positivo). Temos,

$$I = \frac{\varepsilon}{R}$$

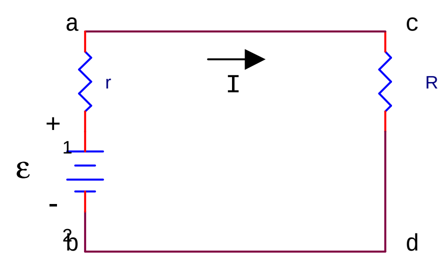
Quando uma carga ΔQ passa através de uma fonte de fem ε, a sua energia potencial aumenta de ΔQ/ε . Ao passar através de um resistor (como na figura baixo), esta energia potencial se converte em energia térmica. A taxa que a energia é proporcionada pela fonte é a potência da fonte:

$$P = \frac{\Delta Q * \varepsilon}{\Delta t} = \varepsilon * I$$



Numa **bateria real**, a diferença entre os terminais, a **voltagem da bateria**, não é igual a fem. Se fossemos colocar uma bateria real no circuito acima perceberíamos que se a corrente variar pela variação de **R**, e se medirmos a voltagem da bateria verificaremos que a voltagem diminui quando a corrente aumenta. É como se a bateria real fosse constituída da bateria ideal de fem ε, mais uma pequena resistência **r**, a **resistência interna**.

$$V_a = V_b + \varepsilon - I * r$$
$$\Rightarrow V_a - V_b = \varepsilon - I * r$$
$$\Rightarrow I * R = \varepsilon - I * r$$
$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$



A energia disponível numa bateria é o produto da carga total pela fem:

$$W = Q * \varepsilon$$

Exemplo:

A uma bateria de fem igual a 6 V e resistência interna de 1 Ω está ligado um resistor de 11 Ω. Calcular *(a)* a corrente, *(b)* a voltagem da bateria, *(c)* a potência proporcionada por esta fonte de fem, *(d)* a potência proporcionada ao resistor externo e *(e)* a potência dissipada na resistência interna da bateria. *(f)* Se a bateria for de 150 A*h, que energia pode reter?

Solução:

(a)

$$I = \frac{\varepsilon}{R+r} = \frac{6}{11+1} = 0{,}5A$$

(b)

$$V_a - V_b = \varepsilon - I * r = 6 - (0{,}5) * (1) = 5{,}5V$$

(c)

$$P = \varepsilon * I = (6) * (0{,}5) = 3W$$

(d)

$$P = I^2 * R = (0{,}5)^2 * (11) = 2{,}75W$$

(e)

$$P = I^2 * r = (0{,}5)^2 * (1) = 0{,}25W$$

(f)

$$W = Q * \varepsilon = (150) * 3600 * (6) = 3{,}24MJ$$

Pois 1 A*h = 3600 C

Exageramos, neste exemplo, no valor da resistência interna da bateria. Em outros exemplos vamos ignorá-la.

Regras de Kirchhoff:

Há muitos circuitos, como o da Figura 1 abaixo, que não podem ser analisados pela simples substituição de resistores por outros que lhes sejam equivalentes. Os dois resistores R_1 e R_2, no circuito da figura, aprecem em paralelo, mas não estão. A queda de potencial não é a mesma nos dois, pois há uma fonte de fem ε_2 em série com R_2. Estes dois resistores, R_1 e R_2, também não estão em série, pois não conduzem a mesma corrente.

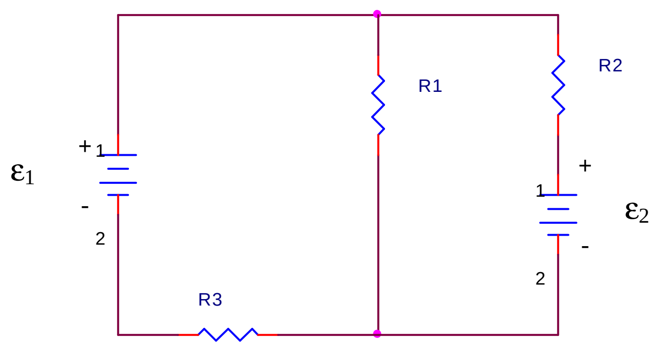


Figura1. Exemplo de circuito que não pode ser analisado pela substituição de combinações de resistores em série ou em paralelo.

Duas regras gerais, as regras de Kirchhoff, aplicam-se a este e a qualquer outro circuito:

4. Quando se percorre uma malha fechada num circuito, a soma algébrica das variações de potencial é necessariamente nula.

5. Em qualquer nó do circuito, onde a corrente se divide, a soma das correntes que fluem para o nó é igual à soma das correntes que saem do nó.

A primeira regra, **regra das malhas**, é conseqüência direta da conservação de energia. A segunda, **regra dos nós**, é conseqüência da conservação de carga.

Circuitos com uma Só Malha:

Como exemplo da aplicação da regra das malhas, seja o circuito da Figura 2, com duas baterias de resistências internas r_1 e r_2, e três resistores externos. Queremos determinar a corrente em função das fems.

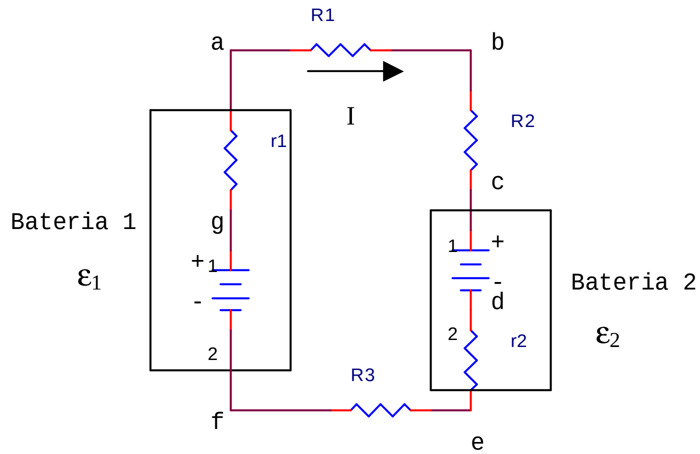


Figura2. Exemplo de circuito com duas baterias e três resistores.

Admitindo que o sentido da corrente seja horário, observamos entre os pontos **a** e **b** uma queda de tensão. O mesmo ocorre entre **b** e **c**, e assim sucessivamente. Veja que há uma queda de potencial ao se atravessar uma fonte de fem entre os pontos **c** e **d**, e um aumento de potencial ao se atravessar a outra fonte, entre **f** e **g**. A regra das malhas nos dá:

$$V = R.I$$

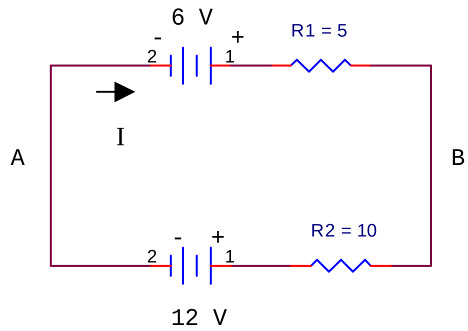
$$-IR_1 - IR_2 - \varepsilon_2 - Ir_2 - IR_3 + \varepsilon_1 - Ir_1 = 0$$

Resolvendo em I, temos:

$$I = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2}$$

Se ε2 for maior do que ε1, a corrente I será negativa, e então o sentido que admitimos hipoteticamente está errado.

Exemplo: No esquema, têm-se duas baterias ligadas em paralelo. *(a)* qual a intensidade de corrente que circula pelas baterias? *(b)* qual é o valor da diferença de potencial entre os pontos **A** e **B**, e qual o ponto de maior potencial? *(c)* Qual das duas baterias está funcionando como receptor?



Solução:

$$-\varepsilon_1 + Ir_1 + Ir_2 + \varepsilon_2 = 0$$
$$-6 + 5I + 10I + 12 = 0$$
$$15I = -6 \Rightarrow I = -0{,}4A$$

Como a corrente resultou negativa, o sentido é contrário ao do convencional.

(b) Tomando-se o ramo **AB** e considerando o sentido correto da corrente, temos da lei de Ohm generalizada:

$$U_{BA} = V_B - V_A = i.\sum resistências + \sum \ fcems - \sum fems$$

$$U_{BA} = 0{,}4 * 5 + 6 - 0 \Rightarrow U_{BA} = 8V$$

$$U_{AB} = V_A - V_B = i.\sum resistências + \sum \ fcems - \sum fems$$

$$U_{AB} = 0{,}4 * 10 + 0 - 12 \Rightarrow U_{AB} = -8V$$

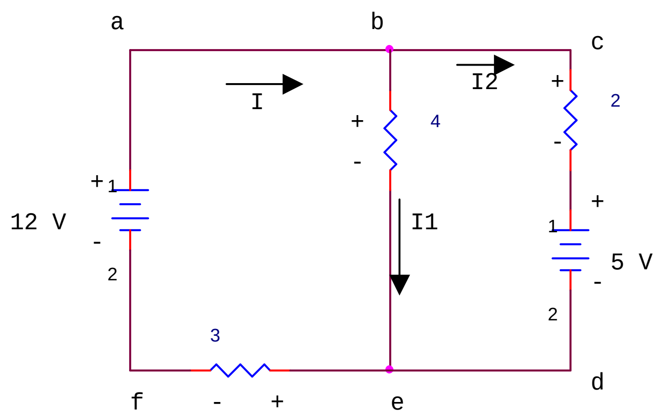
Portanto a ddp entre **A** e **B** vale 8 V e o ponto de maior potencial elétrico é o ponto **B**.

(c) A bateria 1 está funcionando como receptor, pois o sentido convencional da corrente entra pelo pólo positivo e sai pelo negativo.

Circuitos com Várias Malhas:

Para analisar circuitos com mais de uma malha é preciso aplicar as duas regras de Kirchoff. A regra dos nós aplica-se aos pontos em que cada corrente se divide em outras duas ou mais.

Exemplo: *(a)* Calcular a corrente em cada parte do circuito esquematizado abaixo *(b)* Calcular a energia dissipada em 3s no resistor de 4 Ω.



Solução:

São três correntes desconhecidas I, I_1 e I_2, portanto precisamos de três equações independentes.

(a) Regra dos nós aplicada ao ponto *b*:

$$I = I_1 + I_2$$

Regra das malhas aplicada à malha *abcdefa*:

$$12 - 2 * I_2 - 5 - 3(I_1 + I_2) = 0$$
$$7 - 3I_1 - 5I_2 = 0$$

Regra das malhas aplicada à malha *abefa*:

$$12 - 4 * I_1 - 3(I_1 + I_2) = 0$$
$$12 - 7I_1 - 3I_2 = 0$$

Temos as equações:

$$7 - 3I_1 - 5I_2 = 0$$
$$12 - 7I_1 - 3I_2 = 0$$

Resolvendo o sistema:

$$I_1 = \frac{39}{26} = 1{,}5A$$
$$I_2 = \frac{2{,}5}{5} = 0{,}5A$$

Portanto:

$$I = I_1 + I_2$$
$$I = 1{,}5 + 0{,}5 = 2A$$

(b) A potência dissipada no resistor é:

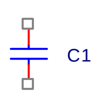
$$P = I_1^2 R$$
$$P = (1{,}5)^2 * 4 = 9W$$

A energia dissipada será:

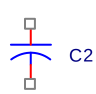
$$W = Pt$$
$$W = 9 * 3 = 27J$$

Capacitores:

Denomina-se **condensador** ou **capacitor** ao conjunto de condutores e dielétricos arrumados de tal maneira que se consiga armazenar a **máxima** quantidade de cargas elétricas. Sua simbologia é:



ou



A capacidade elétrica ou **capacitância**, que relaciona quantidade de carga **Q** e tensão **V,** pode ser expressa como:

$$C = \frac{Q}{V}$$

A unidade de capacitância no Sistema Internacional é o **farad (F)** .

Quando o condutor é esférico, de raio **R**, isolado e em equilíbrio eletrostático, o potencial elétrico é determinado por:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{k.\frac{Q}{R}} \Rightarrow C = \frac{R}{k}$$

Onde k é a constante eletrostática (que no vácuo vale $9x10^9$ $N.m^2/C^2$).

A **energia potencial elétrica** do capacitor será:

$$U = \frac{1}{2}C.V^2$$

Associação de Capacitores:

Assim como os resistores, podemos ligar nossos capacitores em série ou em paralelo. A associação em série visa dividir a tensão entre vários capacitores, sem que se queimem. Podemos então, pensar em um **capacitor equivalente**, que nas mesmas condições, eqüivaleria a todos os outros.

$$\begin{aligned}
&série \Rightarrow \frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ... \\
&V = V_1 + V_2 + V_3 + ... \\
&Q_1 = Q_2 = Q_3 = ...
\end{aligned}$$

Já a associação em paralelo, visa aumentar a quantidade de carga armazenada, mas mantendo a tensão. Desta maneira,

$$\begin{aligned}
&paralelo \Rightarrow C_e = C_1 + C_2 + C_3 + ... \\
&Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + ... \\
&V_1 = V_2 = V_3 = ...
\end{aligned}$$

Circuitos RC :

Um circuito com um resistor e um capacitor é um circuito **RC**. A corrente neste circuito circula num só sentido, mas tem valor que varia no tempo. Um exemplo prático de um circuito RC é o de uma lâmpada de *flash* de máquina fotográfica. Neste circuito uma bateria carrega um capacitor através de um resistor em série. O clarão que ilumina a cena, é decorrente da descarga do capacitor. Com as regras de Kirchhoff é possível ter as equações da carga Q e da corrente I em função do tempo, na carga e descarga de um capacitor através de um resistor.

Descarga de um Capacitor:

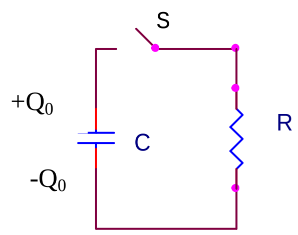


Figura1. Capacitor em série com uma chave (S) e um resistor R.

A diferença de potencial no capacitor é:

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}$$

No instante t = 0 a chave é fechada. Como há uma diferença de potencial no resitor, há uma corrente que o percorre. A corrente inicial é

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC}$$

Esta corrente é provocada pelo deslocamento de carga da placa positiva para a negativa. Neste processo, porém, a carga do capacitor se reduz. Supondo que a corrente circule no sentido horário, ela irá medir a taxa de diminuição de carga em função do tempo, ou seja:

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

Aplicando a regra das malhas, teremos uma queda de tensão proporcional a *IR* e uma elevação de potencial proporcional a *Q/C* .

$$\frac{Q}{C} - IR = 0$$

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} = 0$$

A solução da equação acima (equação diferencial) será aprendida futuramente nas matérias de matemática, e pode ser expressa como:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} = Q_0 e^{-t/\tau}$$

Onde τ é a constante de tempo (intervalo em que a carga leva para cair a 1/e do seu valor inicial) . Para a corrente teremos:

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

Carga de um Capacitor:

De maneira análoga podemos construir o caso de carga em um capacitor. Considerando o circuito abaixo, teremos:

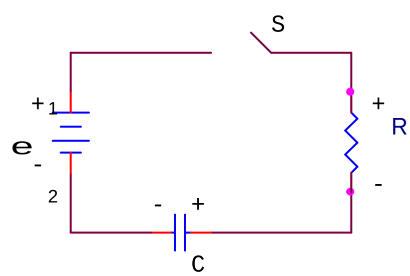


Figura2. Circuito para carregar capacitor.

Se em t=0, fechamos a chave, a carga imediatamente começa a passar pelo resistor e a se acumular na placa positiva do capacitor. Usando a regra das malhas:

$$\varepsilon - V_R - V_C = 0$$

$$\varepsilon - I * R - \frac{Q}{C} = 0$$

O sentido que tomamos para a corrente corresponde ao crescimento da carga no capacitor, ou seja:

$$I = +\frac{dQ}{dt}$$

Com isso,

$$\varepsilon = R * \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}$$

No instante t =0 a carga é nula no capacitor e a corrente será:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$$

A solução da equação diferencial pode ser expressa, neste caso, como:

$$Q(t) = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC}) = Q_f(1 - e^{-t/\tau})$$

Em que

$$Q_f = C\varepsilon$$

$$I = I_0 e^{-t/\tau}$$

Exemplo: Um capacitor de 4μF é carregado a 24 V e depois ligado a um resistor de 200Ω. Calcular (a) a carga inicial no capacitor, (b) a corrente inicial no resistor, (c) a constante de tempo do circuito, (d) a carga no capacitor depois de 4ms.

Solução:

(a) A carga inicial é dada pela capacitância e pela tensão:

$$Q_0 = CV = (4\mu F) * (24V) = 96\mu C$$

(b) A corrente inicial é igual ao quociente entre a voltagem inicial e a resistência:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{24}{200} = 0{,}12\ A$$

(c) A constante de tempo será:

$$\tau = RC = (200)*(4x10^{-6}) = 800\ \mu s = 0{,}8 ms$$

(d) Temos:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} = (96\ \mu C)e^{-(4ms)/(0,8ms)}$$
$$Q(t) = (96\ \mu C)e^{-5}$$
$$Q(t) = 0{,}647\ \mu C$$