

UNIP

ICET

Fundamentos de Matemática Financeira

FEV/2008

I Conceitos Fundamentais

Aspectos envolvidos : Valor Presente (PV) ou Principal (P)
Valor Futuro (FV) ou Montante (M)
Prazo (n)
Fator de Variação (FDV)
Juros (J)
Taxa de Juros (i)

Considere a situação abaixo para a compreensão dos conceitos :

Aplicou-se R\$ 1.000,00 por um prazo de 30 dias, ou 1 mês, remunerado a 3% ao mês. Vencido o prazo de aplicação, resgatou-se R\$ 1.030,00.

Fator de Variação

Fórmula : $FDV = FV / PV \Rightarrow$ Variação entre os valores

No exemplo : $FDV = R\$ 1.030,00 / R\$ 1.000,00 = 1,030$

Juros (J)

Fórmula : $J = FV - PV$

No exemplo : $J = R\$ 1.030,00 - R\$ 1.000,00 = R\$ 30,00$

Taxa de Juros (i)

Fórmula : $i = (J / PV) * 100 = ((FV - PV) / PV) * 100$

No exemplo : $i = ((R\$ 1.030,00 - R\$ 1.000,00) / R\$ 1.000,00) * 100 = 3\%$

Juros Simples (Js)

Fórmula : $J_s = PV * i * n$

No exemplo : $J_s = R\$ 1.000,00 * 0,03 * 1 = R\$ 30,00$

Note-se que se i é dado em mês, n deve estar na mesma base.

Note-se também que i deve ser considerada em número puro e não em percentual, portanto, $i = 3\% = 3 / 100 = 0,03$.

Montante (M) ou Valor Futuro (FV)

Fórmula : $M = P + J$, ou
 $M = P + (P * i * n)$, então
 $M = P * (1 + i * n)$

No exemplo : $M = R\$ 1.000,00 * (1 + 0,03 * 1) = R\$ 1.000,00 * 1,03 = R\$ 1.030,00$

Considerações

As taxas de juros (i) são sempre expressas por unidade de tempo. Portanto, devem estar em consonância com a unidade de tempo do prazo (n).

Por exemplo : 10% ao ano por um prazo de 15 anos; 2% ao mês por um prazo de 6 meses.

Freqüentemente é necessário converter ou a taxa ou o prazo.

Por exemplo : 10% ao ano durante 18 meses. Considere $n = 18 \text{ meses} / 12 \text{ meses} = 1,5 \text{ ano}$ ou
 $i = 10\% \text{ ao ano} / 12 \text{ meses} = 0,8334\% \text{ ao mês}$

Outro exemplo: 2% ao mês durante 10 dias. Considere $n = 10 \text{ dias} / 30 \text{ dias} = 0,334 \text{ mês}$ ou
 $i = 2\% \text{ ao mês} / 30 \text{ dias} = 0,0667\% \text{ ao dia}$.

Exemplo : Empréstimo de R\$ 2.000,00 a uma taxa de 8% ao ano (a.a.), durante 30 meses. Qual é o montante no final do período ?

$PV = R\$ 2.000,00$; $i = 8\% \text{ a.a.}$; $n = 30 \text{ meses}$; $M = ?$

Consideração 1 : Transformar i de % para número puro $\Rightarrow i = 8 / 100 = 0,08$

Consideração 2 : Transformar i anual para mensal $\Rightarrow i = 0,08 / 12 = 0,00667 \text{ a.m.}$
ou transformar n mensal para anual $\Rightarrow N = 30 / 12 = 2,5 \text{ anos}$

(1) $\Rightarrow M = PV * (1 + i * n) = R\$ 2.000,00 * (1 + 0,00667 * 30) = R\$ 2.400,00$

(2) $\Rightarrow M = R\$ 2.000,00 * (1 + 0,08 * 2,5) = R\$ 2.400,00$

Exercícios de Juros Simples

- 1 Bereba recebeu R\$ 2.500,00 e vai aplicá-la por três meses, à taxa de 10% ao mês (a.m.). Qual o juro ao final do período ?
- 2 Seo Expedito aplicou R\$ 5.000,00 por 1 ano e resgatou R\$ 5.400,00. Qual a taxa de juro anual ?
- 3 Manguaça, movido por um impulso ético-empresário, tomou emprestado de um parceiro R\$ 100.000,00 para abrir um boteco. Aceitou pagar 720% ao ano por um prazo de 320 dias. Qual o juro da operação ?

- 4 Dona Dondinha necessita fazer uma lipo. Pegou sua economia de R\$ 800,00 e deu uma de agiota iniciante emprestando para Dona Cotinha à taxa de 12% ao ano. Depois de um tempo, após umas bifas, Cotinha pagou exatos R\$ 1.184,00. Quanto tempo Dona Cotinha demorou para quitar sua dívida ?
- 5 Dona Dondinha, do exercício anterior, percebeu que terá que triplicar o valor recebido da Cotinha (R\$ 1.184,00) para poder fazer a tal lipo. Resolveu então emprestar para outra amiga, Dona Belinha, à taxa de 18% ao mês. Depois de quanto tempo Dondinha terá que dar umas bifas na Belinha para receber seu montante triplicado ?

II Juro Exato e Juro Comercial

Juro comercial considera o ano com 360 dias e cada mês com 30 dias.

Já o juro exato considera o ano com 365 dias.

Desconto Simples

Composto por dois tipos de descontos :

Desconto Racional (“por dentro”) – Taxa de juros incide sobre o valor atual do título.

Desconto Comercial (“por fora”) - Taxa de Juros incide sobre o valor nominal do título (Mais utilizado no sistema financeiro).

Entende-se como Valor Líquido a diferença entre o Valor Nominal e o desconto.

Nomenclatura :
VN = Valor nominal do título
VA = Valor atual do título líquido ou descontado
n = Período
i = Taxa de juros simples
d = Taxa de desconto
DC = Desconto Comercial
DR = Desconto Racional
VC = Valor líquido comercial
VR = Valor líquido racional

Cálculo do Desconto Comercial e do Valor Líquido

Fórmulas :
Desconto Comercial = $DC = VN * d * n$
Valor Líquido Comercial = $VC = VN * (1 - d * n)$

Exemplo : Dado o valor do título nominal de R\$ 1.000,00 e a taxa de desconto comercial de 10% ao mês, calcule :

- a) o valor do desconto comercial 3 meses antes do vencimento
- b) o valor descontado ou valor atual

a) $DC = VN * d * n = R\$ 1.000,00 * 10\% * 3 = R\$ 1.000 * 0,10 * 3 = R\$ 300,00$
b) $VC = VN - DC = R\$ 1.000,00 - R\$ 300,00 = R\$ 700,00$

Cálculo do Desconto Racional e do Valor Atual

Fórmulas :
 $DR = VA * i * n$
 $VA = VN / (1 + i * n)$

Exemplo : Para um título de R\$ 1.000,00 à taxa de desconto de 5% ao mês, qual o valor de desconto 2 meses antes do vencimento ?

$$VN = R\$ 1.000; i = 5\% \text{ a.m.}; n = 2 \text{ meses}; DR = ?; VA = ?$$

$$VA = VN / (1 + i * n) = R\$ 1.000 / (1 + 0,05 * 2) = R\$ 1.000 / 1,1 = R\$ 909,10$$
$$DR = VA * i * n = R\$ 909,10 * 0,05 * 2 = R\$ 90,91$$

Desconto Bancário (DB)

Composto do desconto comercial mais outras despesas e impostos sobre operações financeiras, sobre o valor nominal.

Exemplo : Título de R\$ 120.000,00 descontado 4 meses antes do vencimento, à taxa de 5% ao mês. O banco cobra uma taxa de 2% sobre o valor nominal como despesas administrativas, 1,5% ao ano de IOF. Qual o valor líquido do título ?

$$DC \text{ e } VC = ?; VN = R\$ 120.000; d = 5\% \text{ a.m.}; n = 4 \text{ meses}; TxAdm = 2\%;$$
$$IOF = 1,5\% \text{ a.a} = (1,5 / 100) / 12 = 0,00125 \text{ a.m.}$$

$$DC = VN * d * n = R\$ 120.000 * 0,05 * 4 = R\$ 24.000$$

$$IOF = VN * i_{IOF} * n = R\$ 120.000 * 0,00125 * 4 = R\$ 600,00$$

$$DspAdm = VN * TxAdm = R\$ 120.000 * 0,02 = R\$ 2.400$$

$$DB = DC + IOF + TxAdm = R\$ 24.000 + R\$ 600,00 + R\$ 2.400 = R\$ 27.000$$

$$VC = VN - DB = R\$ 120.000 - R\$ 27.000 = R\$ 93.000$$

Relação entre Taxa de Desconto (d) e Taxa Efetiva (i)

No desconto racional (“por fora”) as taxas de desconto e os juros (taxa efetiva) coincidem. No desconto comercial (“por dentro”) as taxas são diferentes.

$$\text{Taxa Efetiva (i), dada a Taxa de Desconto (d) : } i = d / (1 - d * n)$$

$$\text{Taxa de Desconto (d), dada a Taxa Efetiva (i) : } d = i / (1 - i * n)$$

Desconto de Duplicatas

Considere a situação : Uma empresa pretende efetuar operação de desconto de duplicata. Valor da Duplicata = R\$ 1.000, Taxa de Desconto = 2% ao mês. Prazo de desconto = 2 meses. O banco exige 20% de reciprocidade. Qual o valor líquido creditado para a empresa ?

$$VC = VN * (1 - i * n) = R\$ 1.000 * (1 - 0,02 * 2) = R\$ 1.000 * 0,96 = R\$ 960,00$$

$$\text{Retenção para Reciprocidade} = VN * TxReciprocidade = R\$ 1.000 * 0,20 = R\$ 200,00$$

$$\text{Valor Creditado} = VC - \text{Reciprocidade} = R\$ 960,00 - R\$ 200,00 = R\$ 760,00$$

Exercícios de Juro Exato e Juro Comercial

- 1 Aplica-se R\$ 100.000 a 20% ao ano pelo prazo de 60 dias. Calcular o juro exato e o comercial nessa ordem.
- 2 Calcular o juro exato e o comercial, nessa ordem, para um título de R\$ 255.000 à taxa anual de 24% pelo prazo de 420 dias.

Exercícios de Desconto

- 1 Uma duplicata de R\$ 200.000 vai ser descontada 45 dias antes do vencimento. A taxa de juros é de 4% ao mês. Qual o valor do desconto racional ?
- 2 Um título foi descontado à taxa de 2% ao mês. O valor nominal era de R\$ 7.414,00 e o valor descontado racional de R\$ 6.740,00. Qual o prazo de antecipação ?
- 3 Uma empresa desconta uma duplicata no valor de R\$ 18.000,00 3 meses antes do vencimento. A taxa de desconto comercial é de 5% ao mês. Qual é o desconto comercial, o valor descontado e a taxa de juros simples, nessa ordem ?
- 4 Uma empresa desconta uma duplicata 50 dias antes do vencimento com taxa de desconto comercial de 6% ao mês. O valor nominal do título é de R\$ 400.000,00. A taxa administrativa é de 2% e o IOF é de 15% ao ano. Qual é o desconto comercial, o valor líquido recebido e a taxa efetiva de juros simples ?
- 5 Um banco lhe oferece um empréstimo pessoal à taxa de 4% ao mês mais 2% de despesas administrativas. O valor oferecido é de R\$ 90.000,00, para ser pago em 2 meses. Qual o valor total do compromisso ?
- 6 Qual é o valor do desconto bancário para a duplicata de R\$ 100.000,00, com prazo de antecipação de 45 dias, taxa de desconto comercial de 80% ao ano e 2% de despesas administrativas ?
- 7 Uma financeira vai operar a uma taxa efetiva de juros simples de 10% ao ano para operações de 2 meses. Qual a taxa de desconto comercial anual que deverá cobrar ?
- 8 O desconto comercial de uma duplicata de 45 dias de seu vencimento é de R\$ 1.440,00, sendo que o desconto racional é de R\$ 1.378,00. Qual a taxa dessa operação e o valor nominal ?
- 9 Um banco deseja ganhar 20% ao ano como taxa efetiva. Qual a taxa de desconto comercial para operações de desconto de duplicatas para as seguintes prazos :
a 30 dias b 2 meses c 3 meses
- 10 Um banco faz uma operação de desconto comercial à taxa de 5% ao mês. As despesas administrativas são da ordem de 2%, O banco exige reciprocidade de 10% do valor da duplicata, que é de R\$ 4.000,00 e o prazo de antecipação é de 2 meses. Qual a taxa efetiva de juros ?

III Juros Compostos (JC)

Ao contrário do Juros Simples, o JC acumula o juros do período ao capital para cálculo dos juros do período seguinte.

Fórmulas :

$$\begin{aligned} \text{FAC} &= (1 + i)^n \\ M &= P * \text{FAC} = P * (1 + i)^n \\ P &= M / \text{FAC} = M / (1 + i)^n \\ \text{VF} &= \text{VP} * \text{FAC} = \text{VP} * (1 + i)^n \\ \text{VP} &= \text{VF} / \text{FAC} = \text{VF} / (1 + i)^n \\ J &= \text{VF} - \text{VP} = M - P \end{aligned}$$

Onde : FAC = Fator de Acumulação de Capital

M = Montante

VF = Valor Futuro

P = Principal

VP = Valor Presente

i = Taxa de Juros

n = Período de Aplicação

J = Juro

Exemplos : Aplica-se hoje R\$ 1.000,00 a 5% a.m.. Qual o montante ao final de 1 ano ?

$$P = 1.000, i = 5\% \text{ a.m.} = 0,05, n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses}, M = ?$$

$$M = 1.000 * (1 + 0,05)^{12} = 1.000 * (1,05)^{12} = 1.000 * 1,79586 = \text{R\$ } 1.795,86$$

Antoninho da Marmoraria pretende, dentro de 5 meses, se matricular num curso de especialização em granitos e afins, que custará, naquela data R\$ 178.298,00. Ele pretende pagar à vista. O banco que AM tem conta lhe oferece juros a 5% a.m.. Quanto AM deve aplicar hoje para poder obter o valor integral da matrícula naquela data ?

$$\text{VF} = 178.298, i = 5\% \text{ a.m.} = 0,05, n = 5 \text{ meses}$$

$$\text{VP} = 178.298 / (1 + 0,05)^5 = 178.298 / 1,2768 = \text{R\$ } 135.000,00$$

Exercícios :

1 Vanderval aplicou R\$ 35.000,00, a 4% a.m., por um prazo de 8 meses. Pede-se o Montante.

a) R\$ 47.899,92 b) R\$ 46.500,00 c) R\$ 47.300,00 d) R\$ 45.000,00 e) R\$ 47.700,00

2 João Paulo C. é cliente do BMG. Recebeu R\$ 2.000.000,00 por um serviço feito. Pretende aplicá-lo por treze meses. Como ele é amigo do dono do banco, conseguiu uma taxa de 2% a.m. limpinho. Qual o Juro da aplicação ?

a) R\$ 691.736,68 b) R\$ 680.000,00 c) R\$ 656.500,00 d) R\$ 676.308,00 e) R\$ 690.300,00

- 3 Márcia Suplício, herdou um valor de sua família e, como não estava precisando, aplicou-o por 12 meses. Ao resgatar o montante, percebeu alegre, saltitante e graciosamente que o Juro foi exatamente igual ao Principal. Qual foi a Taxa de Juros do período ?
- a) 5,50% b) 5,68% c) 5,78% d) 5,80% e) 5,96%
- 4 Clarindo Canaglia, muito atarefado, ficou curioso, pois percebeu que ao resgatar R\$ 77.721,30, sabia apenas que tinha investido R\$ 36.000,00 a uma taxa de juros de 8% a.m.. Achando que era muito pouco, ele gostaria de saber o período em que o principal ficou aplicado.
- a) 9 meses b) 10 meses c) 8 meses d) 1 ano e) 6 meses
- 5 Desembargador Luisinho, ficou estupefato ao saber que alguém tinha investido R\$ 180.000,00, a 4 anos atrás, e que agora estava à sua disposição, R\$ 388.606,50. O desembargador ficou revoltado e gostaria imensamente saber qual foi a taxa de juros ao ano, pois acha que foi muito pouco.
- a) 7,90% a.a. b) 6,89% a.a. c) 8,00% a.a. d) 8,90% a.a. e) 8,10% a.a.

IV Desconto Composto

Da mesma forma que o Desconto Simples, o Desconto Racional é aplicado quando se deseja resgatar uma aplicação ou um título antes da data de seu vencimento, só que no regime de juros compostos. Também há Desconto Racional e Desconto Comercial, sendo o primeiro esmagadoramente mais utilizado

Fórmulas : $VN = VA * (1 + i)^n$
 $VA = VN / (1 + i)^n$
 $DR = VN - VA$

Onde : VN = Valor Nominal do Título, na data de seu vencimento
VA = Valor Atual do Título na data de seu resgate (anterior ao vencimento)
DR = Desconto Racional
i = Taxa de Juro do Título
n = Período de antecipação do resgate

Exemplos : Uma Duplicata de R\$ 250.000,00 foi descontada 3 meses antes de seu vencimento, à taxa de 24% a.m.. Calcule o valor atual e o desconto obtido.

$$VN = 250.000, i = 24\% \text{ a.m.} = 0,24, n = 3 \text{ meses, } VA = ?, DR = ?$$

$$VA = 250.000 / (1 + 0,24)^3 = 250.000 / (1,24)^3 = 250.000 / 1,9066 = R\$ 131.123,47$$
$$DR = 250.000 - 131.121,81 = R\$ 118.876,53$$

Exercícios :

- Uma empresa de publicidade de um conhecido publicitário carequinha, envolvido este com uma patulêia da pesada, necessitou resgatar urgentemente uma duplicata de R\$ 5.000,00, 3 meses antes de seu vencimento. O banco, também da pesada, foi generoso e praticava uma taxa para esse título de 5% a.m.. O carequinha quer saber o valor atual de sua duplicata.
a) R\$ 40.830,27 b) R\$ 40.512,07 c) R\$ 42.380,00 d) R\$ 43.191,88 e) R\$ 41.500,00
- Seo Quinzinho e sua senhora, Dona Santinha, economizaram uns trocados e investiram num título cujo valor nominal era de R\$ 35.000,00. Ocorre que Pafúncio enfiou os pés pelas mãos e se endividou no bingo. Conclusão : tem que resgatar o título 2 meses antes do vencimento a uma taxa de 15% a.m.. Dona Santinha está revoltada. Quer saber o valor que deixou de ganhar.
a) R\$ 8.503,07 b) R\$ 8.535,00 c) R\$ 8.400,00 d) R\$ 8.738,01 e) R\$ 8.830,09
- O desconto racional de uma duplicata de R\$ 250.000,00 foi de R\$ 44.518,22 a uma taxa de 4% a.m.. Pede-se o tempo de antecipação.
a) 2 meses b) 3 meses c) 4 meses d) 1 mês e) 5 meses

4 O desconto da duplicata foi de R\$ 7.903,00, a uma taxa de 5% a.m., a 2 meses de seu vencimento. Qual o valor nominal do título ?

a) R\$ 85.000,00 b) R\$ 95.000,00 c) R\$ 80.000,00 d) R\$ 75.000,00 e) R\$ 70.000,00

5 Por puro descontrolado, Dona Francisquinha resgatou um CDB de R\$ 31.617,27 trinta e seis dias antes de seu vencimento, recebendo do banco R\$ 30.500,00. Teimosamente ela está há 2 meses tentando calcular, com sua HP 12C mesmo, qual a taxa de juro praticada, pois o banco está dando lufas. Dona Mariquinha, sua amigona de longuíssima data, 94 anos de janela, acha que ela deve transformar o período de antecipação de dias em ano. Dê uma ajudinha à Dona Francisquinha, coitada !

a) 43,30% a.a. b) 4,33% a.a. c) 43,30% a.m. d) 4,33% a.m. e) 0,43% a.d.

V Taxas e Capitalização com Periodicidades Não Coincidentes

Taxas Efetiva e Nominal

É comum tratar a Capitalização com base numa periodicidade diferente daquela informada para a taxa de juros. Por exemplo, um banco pode informar a taxa de juros ao ano para uma capitalização de 6 meses.

Entende-se por Capitalização a constituição de um capital em uma data futura com a aplicação de juros por um determinado período. Se a capitalização for anual, por exemplo, o montante será constituído ao final de 12 meses. Se for trimestral, ao final de 3 meses e assim por diante.

Exemplos : Um valor de R\$ 10.000,00 foi aplicado por 1 ano à taxa de 24% a.a., sendo o processo de capitalização trimestral. Qual o montante ?

$$P = 10.000$$

Capitalização trimestral

$$i = 24\% \text{ a.m.} = 0,24 \text{ a.m.} = 0,24 / 4 \text{ ao trimestre} = 0,06 \text{ a.t.}$$

$$n = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses} = \underline{4 \text{ trimestres}}$$

$$M = ?$$

$$M = 10.000 * (1 + (0,06))^4 = 10.000 * (1,06)^4 = 10.000 * 1,2625 = \text{R\$ } 12.624,77$$

Qual o Montante para um valor de R\$ 1.000,00, à taxa de 12% a.a., com capitalização :

$$\text{Anual} \quad M = 1.000 * (1 + 0,12) = \text{R\$ } 1.120,00$$

$$\text{Semestral} \quad M = 1.000 * (1 + (0,12 / 2))^2 = \text{R\$ } 1.123,60$$

$$\text{Trimestral} \quad M = 1.000 * (1 + (0,12 / 4))^4 = \text{R\$ } 1.125,51$$

$$\text{Mensal} \quad M = 1.000 * (1 + (0,12 / 12))^{12} = \text{R\$ } 1.126,82$$

Observação : A taxa por período de capitalização = Taxa Efetiva
A taxa mencionada = Taxa Nominal

Fórmulas : $M = P * (1 + (i / t))^{t * n}$

Onde : M = Montante ou Valor Futuro (VF)

P = Valor Principal ou Valor Presente (VP)

i = Taxa de Juros

n = Período ou Prazo

t = Período de Capitalização

$$if = (1 + (i / t))^t - 1$$

Onde : if = Taxa Efetiva

i = Taxa Nominal

Exercícios :

- 1 A Taxa Nominal de 12% a.a é capitalizada trimestralmente. Pede-se a Taxa Efetiva.
a) 0,1200 b) 0,1144 c) 0,1233 d) 0,1346 e) 0,1255

- 2 Quinzinho vai se aposentar e quer comprar um barco para pescar daqui a 5 anos, já que vive às turras com Dona Francisquinha. Precisa ganhar um juro ao final desse período de R\$ 25.000,00. Conseguiu uma taxa de 4% ao trimestre (a.t.). Qual o Principal e o Montante ?
Dica : $M = P * (1 + i)^n = P + J$ (principal mais juros)
 $P * (1 + i)^n - P = J$
 $P * ((1 + i)^n - 1) = J$

a) R\$ 19.988,59 e R\$ 44.988,59
b) R\$ 18.300,00 e R\$ 43.300,00
c) R\$ 21.430,00 e R\$ 46.430,00
d) R\$ 20.988,59 e R\$ 45.988,59
e) R\$ 22.000,00 e R\$ 47.000,00

- 3 Qual o Montante de um valor de R\$ 1.000,00 aplicado por 4 anos à taxa de 12% a.a, capitalizado semestralmente ?
a) R\$ 1.600,00 b) R\$ 1.500,00 c) R\$ 1.593,85 d) R\$ 1.483,80 e) R\$ 1.512,60

- 4 Qual a Taxa Nominal que corresponde à Taxa Efetiva de 26,5625% a.a., com capitalização semestral ?
a) 24% a.a b) 26% a.a. c) 22% a.a d) 23% a.a e) 25% a.a.

- 5 A Taxa Efetiva correspondente a 25% a.a. de Taxa Nominal, respectivamente com capitalização Mensal, Semestral, Trimestral e Anual é :
a) 24,00%, 23,00%, 23,50% e 22,50%
b) 24,36%, 23,21%, 23,88% e 22,00%
c) 25,50%, 23,10%, 23,70% e 22,10%
d) 26,00%, 23,50%, 23,80% e 22,60%
e) 24,10%, 23,40%, 23,00% e 22,30%

VI Equivalência de Capitais

Se dois ou mais valores nominais com vencimentos diferentes, quando trazidos para uma mesma data de referência tem valores iguais, chamamo-os de equivalentes.

Exemplo : Os capitais abaixo são equivalentes quando descontados à taxa de 5% a.m.. Qualquer que seja o período escolhido com relação à data de referência, os capitais serão iguais na data de referência.

Capital (C)	<u>R\$ 100,00</u>	<u>R\$ 134,00</u>	<u>R\$ 207,90</u>
Período (n)	0	6 meses	15 meses

Escolhendo o período zero (0) como referência, vamos trazer os valores de outras datas para a data zero utilizando a fórmula $VP = VF / (1 + i)^n$, tendo os dados de :
 $i = 5\%$ a.m. = 0,05; $n = 6$ e 15 meses; $VF = R\$ 134,00$ e $R\$ 207,90$ respectivamente

$$R\$ 100,00 = R\$ 134,00 / (1,05)^6 = R\$ 207,90 / (1,05)^{15}$$

Se escolhermos o período 4 como referência, $R\$ 100,00$ deverá ser levado para um valor futuro ($VF = VP * (1 + i)^n$), e os demais trazidos para um valor presente, então temos :
 $i = 0,05$; $VP = R\$ 100,00$; $VF = R\$ 134,00$ e $R\$ 207,90$; $n = 4, 2$ e 13 respectivamente

$$R\$ 100,00 * (1,05)^4 = R\$ 134,90 / (1,05)^2 = R\$ 207,90 / (1,05)^{13} = R\$ 121,55$$

Ficará assim se referenciarmos o período 10 :

$$R\$ 100,00 * (1,05)^{10} = R\$ 134,00 * (1,05)^4 = R\$ 207,90 / (1,05)^5 = R\$ 162,89$$

Portanto podemos definir a fórmula de equivalência como :

Capital	<u>C</u>	<u>C1</u>	<u>C2</u>	<u>C3</u>
Período	n	n1	n2	n3

$$C1 * (1 + i)^{n-n1} = C2 * (1 + i)^{n-n2} = C3 * (1 + i)^{n-n3} \dots$$

Lembrete : Potência com expoente negativo deve ser transformada numa fração.
 $C * (1 + i)^{-n} = C * (1 / (1 + i)^n) = C / (1 + i)^n$

Também é possível comparar 2 ou mais séries de capitais, ao invés de isolados como os exemplos anteriores. Considere no exemplo a seguir uma taxa de 10% a.m. e n em meses :

Exemplo :

Ca		R\$ 110,00	R\$ 121,00	R\$ 131,10	
Cb			R\$ 242,00		R\$ 146,41
n	0	1	2	3	4

Na data 0 : $Ca = R\$ 110,00 * (1,1)^{0-1} + R\$ 121,00 * (1,1)^{0-2} + R\$ 131,10 * (1,1)^{0-3}$
 $Ca = R\$ 110,00 / 1,1 + R\$ 121,00 / 1,21 + R\$ 131,10 / 1,31 = R\$ 300,00$

$Cb = R\$ 242,00 * (1,1)^{0-2} + R\$ 146,41 * (1,1)^{0-4}$
 $Cb = R\$ 242,00 / 1,21 + R\$ 146,41 / 1,46 = R\$ 300,00$

Portanto, Ca e Cb são equivalentes.

Exercícios :

- 1 Qual a equivalência dos capitais do diagrama abaixo, tomando como referência o período 0 (mês) e a taxa de 5% a.m. ?

C		R\$ 4.000,00	R\$ 5.105,13	R\$ 7.542,60
n	0	5	10	18

- a) R\$ 3.134,11 b) R\$ 3.200,00 c) R\$ 3.708,00 d) R\$ 3.807,00 e) R\$ 3.553,04

- 2 Silvião Moreira, repassando a benesse que recebera de um grande amigo empresário, resolveu vender sua Land Rover por R\$ 750,00 apenas. Quem comprar, ainda pode pagar em 3 vezes sem acréscimo, uma no ato e as outras em 30 e 60 dias. Márcio Valério, meio durango que estava, propôs que as duas primeiras parcelas poderiam ser de igual valor, desde que a terceira fosse só de R\$ 200,00. Silvião necessita saber qual o valor das duas parcelas propostas, sabendo que a taxa é de 10% a.m..

Dica :

Ca	R\$ 250,00	R\$ 250,00	R\$ 250,00
Cb	X	X	R\$ 200,00
n	0	1	2

- a) R\$ 263,00 b) R\$ 271,64 c) R\$ 245,50 d) R\$ 280,00 e) R\$ 233,40

- 3 Silvião ficou revoltado com o Valério. Desistiu do negócio e resolveu ofertar para outros sua Land Rover por R\$ 50.000,00 à vista ou a prazo, este último com 2 pagamentos bimestrais iguais e sem entrada. Qual o valor de cada parcela sabendo que a taxa bimestral é de 20% ?

Dica :

Ca	R\$ 50.000,00		
Cb		X	X
n	0	1	2

- a) R\$ 32.640,38 b) R\$ 32.530,01 c) R\$ 34.300,80 d) R\$ 31.500,00 e) R\$ 32.727,28

4 No diagrama abaixo, os valores possuem a mesma taxa referencial. Qual a taxa ?

Ca	<u>R\$ 100,00</u>	<u>R\$ 156,25</u>	<u>R\$ 244,15</u>
n	0	2	4

a) 24% b) 23,5% c) 25% d) 26% e) 25,5%

5 Dona Candinha finalmente vai comprar seu Gol 1000 por R\$ 15.000,00. Pretende pagar um sinal de R\$ 4.500,00 e uma parcela de R\$ 6.500,00 depois de 3 meses, sobrando uma parcela final para daqui a 6 meses. Qual o valor dessa última parcela sabendo que a taxa é de 5% a.m. ?

a) R\$ 6.308,50 b) R\$ 7.108,03 c) R\$ 7.125,27 d) R\$ 7.400,30 e) R\$ 7.025,07

VII Valor Atual ou Valor Presente

O Valor Atual (VA) ou Presente (VP) representa o valor de um ou mais capitais futuros trazidos para a data zero.

Diagrama :

C	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
n	0	1	2	3	4

Fórmula : $VP = C_n / (1 + i)^n$
 VP = valor presente ou atual, Cn = Capital, n = período, i = taxa de juro

Exemplo : Deseja-se saber o valor atual de um bem que foi comprado por R\$ 4.000,00 de entrada mais duas parcelas mensais de R\$ 4.000,00, a uma taxa de 5% a.m..

C	<u>R\$ 4.000</u>	<u>R\$ 4.000</u>	<u>R\$ 4.000</u>
n	0	1	2

$$VA = R\$ 4.000 + (R\$ 4.000 / (1 + 0,05)^1) + (R\$ 4.000 / (1 + 0,05)^2) = R\$ 11.437,64$$

Também pode ser utilizado como critério para escolha de uma alternativa de investimento.

Exemplo : O valor de um carro à vista é de R\$ 50.000,00. à prazo pode ser comprado com uma entrada de R\$ 15.000,00 mais três prestações mensais iguais de R\$ 12.000,00, à taxa de 5% a.m.. Qual seria a melhor alternativa ?

1	C	<u>R\$ 50.000</u>
	n	0

2	C	<u>R\$ 15.000</u>	<u>R\$ 12.000</u>	<u>R\$ 12.000</u>	<u>R\$ 12.000</u>
	n	0	1	2	3

$$VP_1 = R\$ 50.000,00$$

$$VP_2 = R\$ 15.000 + R\$ 12.000 / (1,05)^1 + R\$ 12.000 / (1,05)^2 + R\$ 12.000 / (1,05)^3$$

$$VP_2 = R\$ 47.678,97$$

$VP_2 < VP_1$, portanto, a opção à prazo é mais vantajosa.

Imagine uma terceira opção em 4 parcelas iguais, sendo uma entrada no ato e mais 3 parcelas mensais, à mesma taxa, qual seria o valor das parcelas ?

$$VP = R\$ 50.000, i = 0,05$$

C	<u>R\$ X</u>	<u>R\$ X</u>	<u>R\$ X</u>	<u>R\$ X</u>
n	0	1	2	3

$$\begin{aligned}
 VP &= R\$ 50.000 = X + X / (1,05)^1 + X / (1,05)^2 + X / (1,05)^3 \\
 R\$ 50.000 &= X * (1 + 1 / (1,05)^1 + 1 / (1,05)^2 + 1 / (1,05)^3) \\
 R\$ 50.000 &= X * (1 + (1 / 1,05) + (1 / 1,1025) + (1 / 1,1576)) \\
 R\$ 50.000 &= X * (1 + 0,9524 + 0,9070 + 0,8638) = X * 3,7233 \\
 X &= R\$ 50.000 / 3,7233 = R\$ 13.428,94, \text{ sendo esse o valor de cada parcela.}
 \end{aligned}$$

Exercícios :

- 1 Um banco ofertou duas opções de investimento, a uma taxa de 24% a.a. :
 - 1 Investir R\$ 200.000 hoje e resgatar R\$ 400.000 ao final de 1 ano
 - 2 Investir hoje e resgatar R\$ 100.000 ao final dos próximos 4 anos
 Qual a melhor opção ?
 - a) A segunda, pois poderei ter uma renda nos próximos 4 anos
 - b) Nenhuma das duas, pois a taxa está muito baixa pelo padrão inflacionário atual
 - c) As duas, pois são equivalentes
 - d) A primeira, pois suas condições são melhores
 - e) A segunda, pois suas condições são melhores

- 2 Um certo ministro energético de nossa grande nação, cansado de Brasília, de mudança para sua terra, por livre e espontânea vontade, lhe ofertou sua lancha nas seguintes condições :
 - I R\$ 395 mil à vista
 - II Uma parcela de R\$ 150 mil ao final do mês 6 e outra de R\$ 250 mil ao final do mês 12
 - III Três parcelas de R\$ 110.572 ao final dos meses 2, 4 e 6
 O bondoso cidadão, filho de uma bondosa mãe, sapecou uma taxa de 4% a.m..
 Caso você esteja inclinado a aceitar, qual a melhor opção ?
 - a) As três são equivalentes
 - b) A segunda
 - c) A terceira
 - d) A primeira
 - e) A segunda e a terceira, pois são equivalentes

- 3 Com relação ao exercício anterior, qual o valor de cada parcela da opção III, para que as opções II e III sejam equivalentes ?
 - a) R\$ 100.308 b) R\$ 105.030 c) R\$ 120.500 d) R\$ 110.300 e) R\$ 106.899

- 4 A uma taxa de 10% a.a., qual a melhor opção para investir um capital de R\$ 2.400.000 :
 - I Aplicar num fundo que pagará R\$ 500 mil ao final dos anos 1 e 2 e R\$ 800 mil ao final dos anos 3, 4 e 5
 - II Aplicar num fundo que pagará R\$ 3.250.000 ao final do terceiro ano
 - III Aplicar num fundo que pagará R\$ 3.400.000 ao final do quarto ano
 - IV Aplicar num fundo que pagará R\$ 2.600.000 ao final do primeiro ano
 - V Aplicar num fundo que pagará R\$ 3.600.000 ao final do quinto ano
 - a) Opção V b) Opção I c) Opção IV d) Opção III e) Opção II

- 5 Considere a melhor opção de investir R\$ 200 mil, à taxa de 36% a.a. :
- I Receber R\$ 100 mil ao final dos anos 1, 2 e 3 mais R\$ 70 mil ao final dos anos 4 e 5
 - II Receber R\$ 380 mil ao final do ano 4
 - III Receber R\$ 340 mil ao final do ano 3
 - IV Receber R\$ 300 mil ao final do ano 2
 - V Receber R\$ 260 mil ao final do ano 1
- a) Opção V b) Opção III c) Opção I d) Opção IV e) Opção II

VIII Taxas

As taxas de juros podem ser classificadas pelo aspecto do Regime de Capitalização (Juro Simples e Juro Composto) ou pelo Capital Inicial (Juro Nominal, Juro Efetivo e Juro Real) como base para cálculo.

Taxa de Juro Nominal = Taxa expressa num contrato

Taxa de Juro Efetiva = Taxa realmente praticada

Taxa de Juro Real = Taxa Efetiva diminuída da Taxa de Inflação

Para efeitos comparativos de capitalização, podemos também nos referenciar pelas taxas equivalentes.

Fórmulas : Taxa Efetiva = $i_f = (1 + (i_n / n))^n - 1$
Onde i_n = taxa nominal e n = período de capitalização

Taxa Real = $i_r = ((1 + i_f) / (1 + i_i)) - 1$
Onde i_i = taxa de inflação

Taxa Equivalente (i_e) $\rightarrow (1 + i_e)^n = (1 + i_e)^n$

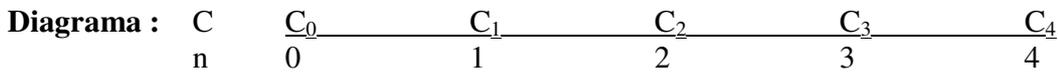
Exercícios :

- 1 Calcule a taxa equivalente para 68 dias com relação à taxa de 5,6% em 34 dias.
a) 60,60% b) 62,50% c) 61,00% d) 60,00% e) 63,69%
- 2 Calcule a taxa equivalente para 250 dias com relação à taxa de 120% em 400 dias.
a) 63,69% b) 62,50% c) 60,00% d) 61,00% e) 60,60%
- 3 O empréstimo realizado de R\$ 100.000,00, com vencimento dentro de 1 ano, com um único pagamento de R\$ 180.000,00, sendo que o banco pede uma contrapartida de 30% do valor emprestado a título de saldo médio, tem que taxas nominal e efetiva respectivamente ?
a) 80 e 114,3% b) 80 e 120,0% c) 75 e 113,0% d) 79 e 112,5% e) 80 e 110,5%
- 4 Um empréstimo de R\$ 200.000,00 será liquidado em um ano com pagamento final de R\$ 400.000,00, tem uma exigência de saldo médio de 20% do valor emprestado. Sabe-se que a inflação anual é de 90%. Quais as taxas nominal, efetiva e real respectivamente ?
a) 100, 140 e 32%
b) 100, 150 e 31,6%
c) 90, 133 e 33,4%
d) 85, 145 e 33%
e) 100, 152 e 32%
- 5 Dada uma taxa de juros de 18% por período e, no mesmo período, uma taxa de inflação de 12%, qual a taxa real ?

a) 5,00% b) 5,36% c) 5,10% d) 4,80% e) 5,20%

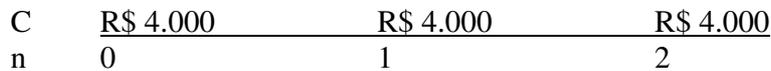
IX Valor Atual ou Valor Presente

O Valor Atual (VA) ou Presente (VP) representa o valor de um ou mais capitais futuros trazidos para a data zero.



Fórmula : $VP = C_n / (1 + i)^n$
 VP = valor presente ou atual, Cn = Capital, n = período, i = taxa de juro

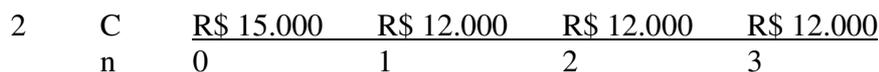
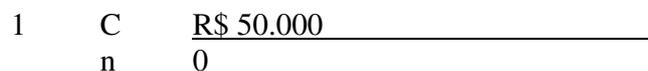
Exemplo : Deseja-se saber o valor atual de um bem que foi comprado por R\$ 4.000,00 de entrada mais duas parcelas mensais de R\$ 4.000,00, a uma taxa de 5% a.m..



$$VA = R\$ 4.000 + (R\$ 4.000 / (1 + 0,05)^1) + (R\$ 4.000 / (1 + 0,05)^2) = R\$ 11.437,64$$

Também pode ser utilizado como critério para escolha de uma alternativa de investimento.

Exemplo : O valor de um carro à vista é de R\$ 50.000,00. à prazo pode ser comprado com uma entrada de R\$ 15.000,00 mais três prestações mensais iguais de R\$ 12.000,00, à taxa de 5% a.m.. Qual seria a melhor alternativa ?



$$VP_1 = R\$ 50.000,00$$

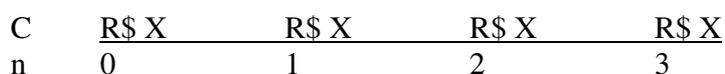
$$VP_2 = R\$ 15.000 + R\$ 12.000 / (1,05)^1 + R\$ 12.000 / (1,05)^2 + R\$ 12.000 / (1,05)^3$$

$$VP_2 = R\$ 47.678,97$$

$VP_2 < VP_1$, portanto, a opção à prazo é mais vantajosa.

Imagine uma terceira opção em 4 parcelas iguais, sendo uma entrada no ato e mais 3 parcelas mensais, à mesma taxa, qual seria o valor das parcelas ?

$$VP = R\$ 50.000, i = 0,05$$



$$VP = R\$ 50.000 = X + X / (1,05)^1 + X / (1,05)^2 + X / (1,05)^3$$

$$\begin{aligned} \text{R\$ } 50.000 &= X * (1 + 1 / (1,05)^1 + 1 / (1,05)^2 + 1 / (1,05)^3) \\ \text{R\$ } 50.000 &= X * (1 + (1 / 1,05) + (1 / 1,1025) + (1 / 1,1576)) \\ \text{R\$ } 50.000 &= X * (1 + 0,9524 + 0,9070 + 0,8638) = X * 3,7233 \\ X &= \text{R\$ } 50.000 / 3,7233 = \text{R\$ } 13.428,94, \text{ sendo esse o valor de cada parcela.} \end{aligned}$$

Exercícios :

- 1 Um banco ofertou duas opções de investimento, a uma taxa de 24% a.a. :
 - 1 Investir R\$ 200.000 hoje e resgatar R\$ 400.000 ao final de 1 ano
 - 2 Investir hoje e resgatar R\$ 100.000 ao final dos próximos 4 anos
 Qual a melhor opção ?
 - a) A segunda, pois poderei ter uma renda nos próximos 4 anos
 - b) Nenhuma das duas, pois a taxa está muito baixa pelo padrão inflacionário atual
 - c) As duas, pois são equivalentes
 - d) A primeira, pois suas condições são melhores
 - e) A segunda, pois suas condições são melhores

- 2 Um certo ministro energético de nossa grande nação, cansado de Brasília, de mudança para sua terra, por livre e espontânea vontade, lhe ofertou sua lancha nas seguintes condições :
 - I R\$ 395 mil à vista
 - II Uma parcela de R\$ 150 mil ao final do mês 6 e outra de R\$ 250 mil ao final do mês 12
 - III Três parcelas de R\$ 110.572 ao final dos meses 2, 4 e 6
 O bondoso cidadão, filho de uma bondosa mãe, sapecou uma taxa de 4% a.m..
 Caso você esteja inclinado a aceitar, qual a melhor opção ?
 - a) As três são equivalentes
 - b) A segunda
 - c) A terceira
 - d) A primeira
 - e) A segunda e a terceira, pois são equivalentes

- 3 Com relação ao exercício anterior, qual o valor de cada parcela da opção III, para que as opções II e III sejam equivalentes ?
 - a) R\$ 100.308 b) R\$ 105.030 c) R\$ 120.500 d) R\$ 110.300 e) R\$ 106.899

- 4 A uma taxa de 10% a.a., qual a melhor opção para investir um capital de R\$ 2.400.000 :
 - I Aplicar num fundo que pagará R\$ 500 mil ao final dos anos 1 e 2 e R\$ 800 mil ao final dos anos 3, 4 e 5
 - II Aplicar num fundo que pagará R\$ 3.250.000 ao final do terceiro ano
 - III Aplicar num fundo que pagará R\$ 3.400.000 ao final do quarto ano
 - IV Aplicar num fundo que pagará R\$ 2.600.000 ao final do primeiro ano
 - V Aplicar num fundo que pagará R\$ 3.600.000 ao final do quinto ano
 - a) Opção V b) Opção I c) Opção IV d) Opção III e) Opção II

- 5 Considere a melhor opção de investir R\$ 200 mil, à taxa de 36% a.a. :
- I Receber R\$ 100 mil ao final dos anos 1, 2 e 3 mais R\$ 70 mil ao final dos anos 4 e 5
 - II Receber R\$ 380 mil ao final do ano 4
 - III Receber R\$ 340 mil ao final do ano 3
 - IV Receber R\$ 300 mil ao final do ano 2
 - V Receber R\$ 260 mil ao final do ano 1
- a) Opção V b) Opção III c) Opção I d) Opção IV e) Opção II